Pontificia Universidad Católica de Chile

Facultad de Física

Electricidad y Magnetismo - FIS1533

Control 1

Profesor: Max Bañados

Ayudantes: Cristóbal Armaza - Mauricio Sarabia

Nombre:

Problema Único. Considere un modelo muy simplificado de un átomo de Hidrógeno, consistente en una carga puntal de magnitud $+e$ (el "protón") ubicada justo en el centro de una nube electrónica esférica maciza de radio a, uniformemente cargada con carga total $-e$ (el "electrón"), y suponga que este átomo se encuentra completamente aislado.

(a) Ignorando la presencia del protón, calcule el campo eléctrico en todo el espacio producido por el electrón, expresando su resultado en términos de los parámetros dados en el enunciado. **(2.5pts)**

(b) Repita el cálculo anterior, considerando ahora la presencia del protón. **(2.5pts)**

(c) Si el protón, con masa m_p, se moviese una pequeña distancia $r \ll a$ del centro de la nube, obtenga su ecuación de movimiento y explique la evolución temporal del mismo. **(1pt)**

Solución. La nube electrónica puede ser modelada como una esfera maciza cargada uniformemente con densidad de carga $\rho \equiv -3e/4\pi a^3$. Dada la simetría esférica del problema, usamos coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) con centro en la esfera, y esperamos que el campo eléctrico apunte radialmente con magnitud dependiente sólo de la distancia r al centro de la esfera, $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$. En este caso podemos utilizar el teorema de Gauss, planteando una superficie gaussiana esférica S concéntrica con la nube, y de radio r mayor o menor que a dependiendo de la región en donde se desee calcular el campo eléctrico. En ambos casos, el flujo a través de esta superficie será

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E(r)\, dS = E(r) \oint_S dS = E(r) \cdot 4\pi r^2,$$

en donde hemos empleado que $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r dS$, por lo que $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\, dS$. En la penúltima igualdad hemos usado que la magnitud del campo, al poseer simetría esférica, es constante sobre una esfera de radio r dado, por lo que sale de la integral de superficie. Por Gauss $\Phi = Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$, por lo que

$$\Phi = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2 \qquad \Longrightarrow \qquad E(r) = \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

en donde la carga encerrada Q_{enc} por S depende del radio r escogido.

(a) En ausencia de la carga positiva al centro de la esfera, tenemos las siguientes cargas encerradas:

$r < a$; la carga encerrada es $Q_{\text{enc}} = \rho \cdot (4\pi r^3/3) = -e(r/a)^3$, por lo que el campo queda

$$E(r) = -e\left(\frac{r}{a}\right)^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{er}{4\pi\epsilon_0 a^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{E} = -\frac{er}{4\pi\epsilon_0 a^3}\mathbf{e}_r,$$

para la región dentro de la nube.

$a < r$; la carga encerrada es simplemente $Q_{\text{enc}} = -e$, luego

$$E(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r,$$

para la región fuera de la nube.

(b) Si ahora incluímos el protón en el centro de la esfera, la carga encerrada es

$r < a$; $Q_{\text{enc}} = -e(r/a)^3 + e$,

$$\Longrightarrow \qquad E(r) = -\frac{er}{4\pi\epsilon_0 a^3} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left[1 - \frac{r^3}{a^3}\right]\mathbf{e}_r$$

en la región dentro de la nube.

$a < r$; $Q_{\text{enc}} = -e + e = 0$, luego el campo es nulo fuera de la nube.

Estos resultados son equivalentes a haber superpuesto el campo producido por la nube, calculado previamente en (a), con el campo producido por la carga puntual en el origen, $\mathbf{E} = (+e/4\pi\epsilon_0 r^2)\mathbf{e}_r$.

(c) Si el protón se mueve una distancia r del centro de la esfera, estará afectado por el campo eléctrico producido por la nube electrónica. La fuerza que el protón siente es $\mathbf{F} = +e\mathbf{E} = -(e^2 r/4\pi\epsilon_0 a^3)\mathbf{e}_r$, por lo que su ecuación de movimiento es

$$m_p \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \qquad \Longrightarrow \qquad m_p \ddot{r} = -\frac{e^2 r}{4\pi\epsilon_0 a^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{r} + \omega^2 r = 0,$$

en donde $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ (coords esféricas) y $\omega^2 \equiv e^2/4\pi\epsilon_0 a^3 m_p$. Esta ecuación corresponde a un oscilador armónico simple con frecuencia ω, por lo que el protón oscilará indefinidamente en torno al centro de la nube. $\diamond$